

Kompetensi Inti

- Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, berdasarkan rasa ingih hatinya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemahasiswaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.
- Mengolah, menalar, dan menyaji dalam ranah konkret dan ranah abstrak terkait dengan pengembangan dari yang dipelajarinya di sekolah secara mandiri, dan mampu menggunakan metode sesuai kaidah keilmuan.

Kompetensi Dasar

- Menjelaskan dan menentukan fungsi (terutama fungsi linear, fungsi kuadrat, dan fungsi rasional) secara formal yang meliputi notasi, daerah asal, daerah hasil, dan ekspresi simbolik, serta sketsa grafiknya.
- Menjelaskan operasi komposisi pada fungsi dan operasi invers pada fungsi invers serta sifat-sifatnya serta menentukan eksistensinya.
- Menganalisa karakteristik masing-masing grafik (titik potong dengan sumbu, titik puncak, asimtot) dan perubahan grafik fungsinya akibat transformasi $f(x)$, $\frac{1}{f(x)}$, $|f(x)|$, dan sebagainya.
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan operasi komposisi dan operasi invers suatu fungsi.

Materi Pokok

Komposisi fungsi

Indikator

- Menjelaskan pengertian relasi dan fungsi.
- Menjelaskan jenis-jenis fungsi.
- Menjelaskan dan menentukan notasi, daerah asal, daerah hasil, ekspresi simbolik, serta sketsa grafik.
- Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan daerah asal dan daerah hasil fungsi.
- Menjelaskan operasi aritmetika (penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian) dan operasi komposisi pada fungsi.
- Melakukan operasi aritmetika dan operasi komposisi pada fungsi.
- Menyelesaikan permasalahan kontekstual yang berkaitan dengan operasi aritmetika dan operasi komposisi pada fungsi.

Uraian Materi

A. Relasi dan Fungsi

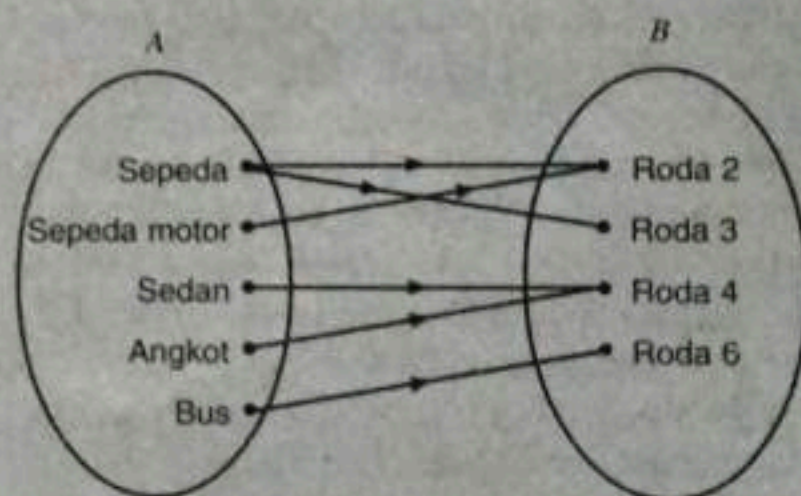
1. Pengertian Relasi dan Fungsi

Banyak fenomena atau kejadian alam yang dapat dihubungkan dengan suatu relasi. Sebagai contoh, diberikan dua himpunan:

$$A = \{\text{sepeda, sepeda motor, sedan, angkot, bus}\}$$

$$B = \{\text{roda dua, roda tiga, roda empat, roda enam}\}$$

Bagaimanakah hubungan antara himpunan A (jenis kendaraan) dan himpunan B (banyaknya roda kendaraan)? Untuk menggambarkannya, dapat dilihat pada diagram berikut ini.



Aturan yang menghubungkan himpunan A dan himpunan B adalah banyaknya roda setiap kendaraan yang diberikan, merupakan suatu relasi. Jadi, relasi didefinisikan sebagai berikut.

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang menghubungkan elemen-elemen pada himpunan A ke elemen-elemen pada himpunan B .

Dalam hal ini, A dinamakan himpunan daerah asal (domain) dan B dinamakan himpunan daerah kawan (kodomain).

Terdapat empat cara menyatakan relasi, yaitu:

- Dengan diagram panah.
- Dengan himpunan pasangan terurut.
- Dengan grafik.
- Dengan persamaan (ekspresi simbolik).

Contoh:

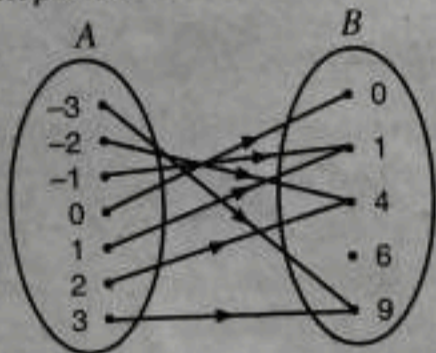
1. Diketahui $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ dan $B = \{0, 1, 4, 6, 9\}$.
Jika x adalah elemen A , y adalah elemen B , dan berlaku hubungan $y = x^2$.
Gambarlah relasi dari A ke B dalam bentuk diagram panah!

Penyelesaian:

Hubungan $y = x^2$

Untuk $x = -3 \rightarrow y = 9$ Untuk $x = 1 \rightarrow y = 1$
 Untuk $x = -2 \rightarrow y = 4$ Untuk $x = 2 \rightarrow y = 4$
 Untuk $x = -1 \rightarrow y = 1$ Untuk $x = 3 \rightarrow y = 9$
 Untuk $x = 0 \rightarrow y = 0$

Diagram panah



2. Diketahui $A = \{2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{3, 4, 5\}$. Jika x adalah elemen A dan y adalah elemen B , serta berlaku hubungan x kurang dari y , nyatakanlah relasi dari A ke B dalam bentuk pasangan berurutan!

Penyelesaian:

Bentuk pasangan berurutan dengan hubungan x kurang dari $y = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$.

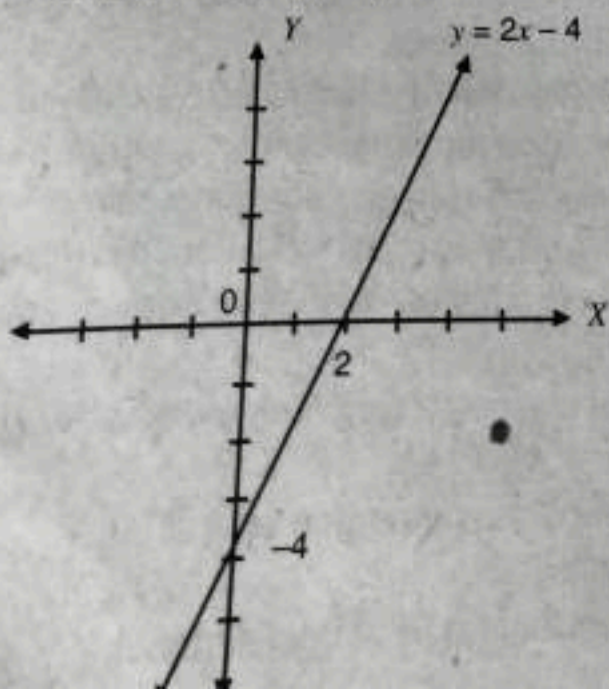
3. Diketahui A adalah himpunan bilangan real dan B juga himpunan bilangan real. Jika x adalah elemen A dan y elemen B , serta berlaku hubungan $y = 2x - 4$, nyatakanlah relasi dari A ke B dalam bentuk grafik!

Penyelesaian:

Dari fungsi $y = 2x - 4$.

Cari titik potong terhadap sumbu X ($y = 0$) maka titiknya $(2, 0)$.

Cari titik potong terhadap sumbu Y ($x = 0$) maka titiknya $(0, -4)$.



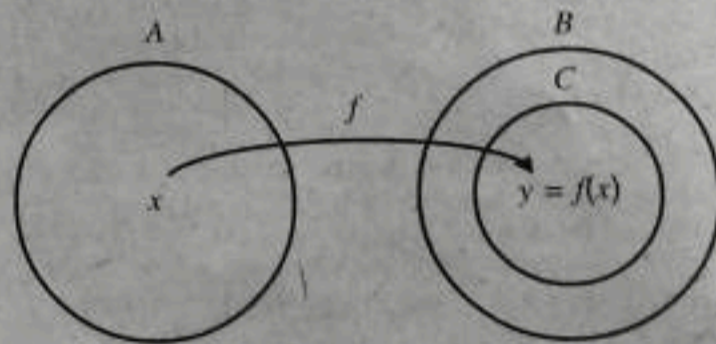
4. Diketahui A adalah himpunan bilangan real dan B juga himpunan bilangan real. Jika x adalah elemen A dan y elemen B , serta berlaku hubungan "Nilai y lebih 5 dari kebalikannya x ", nyatakanlah relasi dari A ke B dalam bentuk persamaan!

Penyelesaian:

Nilai y lebih 5 dari kebalikannya x dapat dituliskan dalam bentuk fungsi $y = \frac{1}{x} + 5$.

2. **Daerah Asal, Daerah Kawan, dan Daerah Hasil**

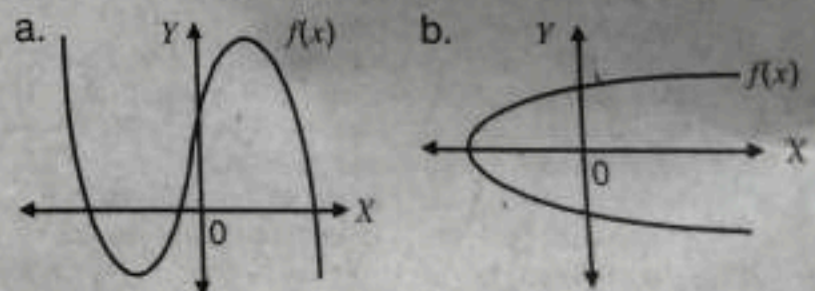
Dalam kehidupan ini, terdapat banyak sekali relasi yang menghubungkan suatu kelompok (himpunan) ke kelompok lain. Sebagai contoh antara himpunan orang tua dan himpunan anak-anak, serta kelompok hewan predator dan kelompok hewan mangsanya. Namun secara garis besar, relasi-relasi tersebut dapat dibagi menjadi dua macam, yaitu fungsi dan bukan fungsi. Jika A dan B adalah himpunan yang terdefinisi, maka fungsi f dari A ke B ialah suatu relasi khusus yang memetakan setiap x anggota A ke tepat satu y anggota B .



Himpunan A dinamakan daerah asal (domain), dilambangkan dengan D_f . Himpunan B dinamakan daerah kawan (kodomain), dilambangkan dengan K_f . Himpunan C dinamakan daerah hasil (range), dilambangkan dengan R_f , yaitu himpunan unsur-unsur pada B yang mempunyai pasangan dari A .

Contoh:

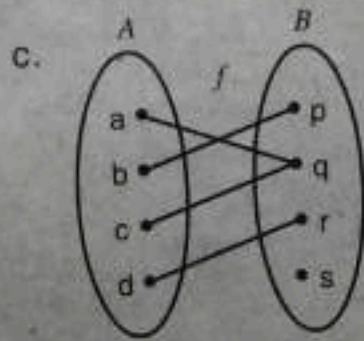
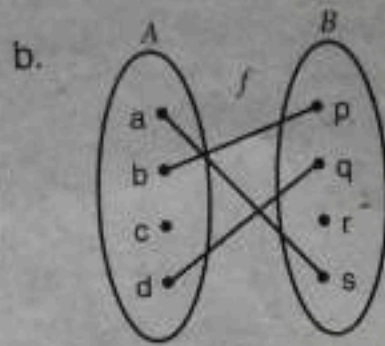
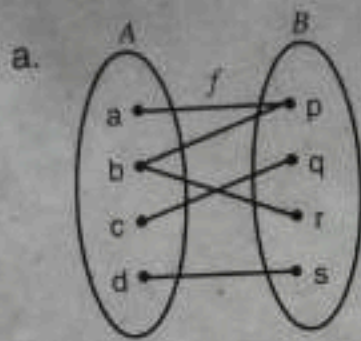
1. Manakah di antara relasi yang digambarkan dalam bentuk grafik berikut ini yang merupakan fungsi?



Penyelesaian:

- a. Fungsi.
 b. Bukan fungsi karena ada sisa dan cabang pada daerah asal.

2. Manakah di antara relasi yang digambarkan dalam bentuk diagram panah berikut ini yang merupakan fungsi?



Penyelesaian:

- a. Bukan fungsi karena ada cabang (unsur b) di daerah asal.
 b. Bukan fungsi karena ada sisa (unsur c) di daerah asal.
 c. Fungsi.
3. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$. Manakah di antara relasi yang digambarkan dalam bentuk pasangan berurutan berikut ini merupakan fungsi?

- a. $f: A \rightarrow B = \{(2, 1), (4, 3), (3, 1), (1, 3), (4, 2)\}$.
 b. $f: A \rightarrow B = \{(1, 3), (4, 1), (3, 2)\}$.
 c. $f: B \rightarrow A = \{(2, 4), (3, 1), (1, 2)\}$.
 d. $f: B \rightarrow A = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$.
 e. $f: A \rightarrow A = \{(1, 4), (3, 1), (2, 2), (4, 3)\}$.

Penyelesaian:

- a. Bukan fungsi karena ada cabang (unsur 4) di daerah asal A.
 b. Bukan fungsi karena ada sisa (unsur 2) di daerah asal A.
 c. Fungsi.
 d. Fungsi.
 e. Fungsi.
4. Tentukan daerah asal alamiah dari setiap fungsi berikut ini!

- a. $f(x) = 4x - 12$
 b. $f(x) = \sqrt{4x - 8}$
 c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$
 d. $f(x) = \frac{4x - 5}{3x - 9}$

Penyelesaian:

- a. $f(x) = 4x - 12$
 Fungsi linear terdefinisi untuk semua bilangan real.
 Daerah asal: $D_f = \{x \mid x \in R\}$.

- b. $f(x) = \sqrt{4x - 8}$
 Syarat: $4x - 8 \geq 0$
 $4x \geq 8$
 $x \geq 2$
 Daerah asal: $D_f = \{x \mid x \in R, x \geq 2\}$.

- c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$
 Syarat: $x^2 - 7x + 10 \geq 0$
 $(x - 5)(x - 2) \geq 0$
 $x_1 = 5$ dan $x_2 = 2$
 sehingga: $x \leq 2$ atau $x \geq 5$
 Daerah asal: $D_f = \{x \mid x \in R, x \leq 2 \text{ atau } x \geq 5\}$.

- d. $f(x) = \frac{4x - 5}{3x - 9}$
 Syarat: $3x - 9 \neq 0$
 $3x \neq 9$
 $x \neq 3$

Daerah asal: $D_f = \{x \mid x \in R, x \neq 3\}$.

5. Tentukanlah daerah hasil dari setiap fungsi berikut ini!

- a. $f(x) = x^2 + 4x - 12$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R\}$.
 b. $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 5}$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R, x \neq -5\}$.

Penyelesaian:

- a. $f(x) = x^2 + 4x - 12$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R\}$.
 Diperoleh x minimum:

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(1)} = -2$$

Substitusikan ke $f(x) = x^2 + 4x - 12$

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 + 4(-2) - 12 \\ &= 4 - 8 - 12 \\ &= -16 \end{aligned}$$

Jadi, $R_f = \{y \mid y \in R, y \geq -16\}$.

- b. $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 5}$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R, x \neq -5\}$
 untuk $D_f = \{x \mid x \in R, x \neq -5\}$ diperoleh:

$$y = f(x) = \frac{2x - 3}{x + 5}$$

$$y(x + 5) = 2x - 3$$

$$xy + 5y = 2x - 3$$

$$xy - 2x = -5y - 3$$

$$x(y - 2) = -5y - 3$$

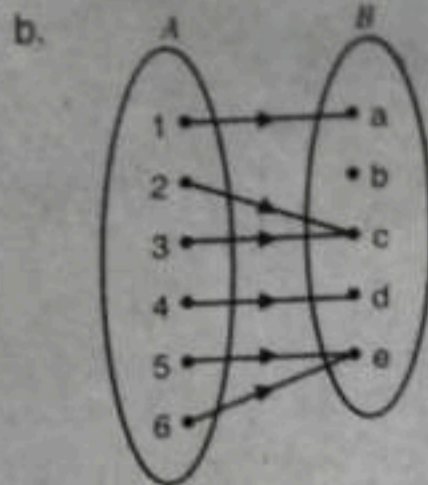
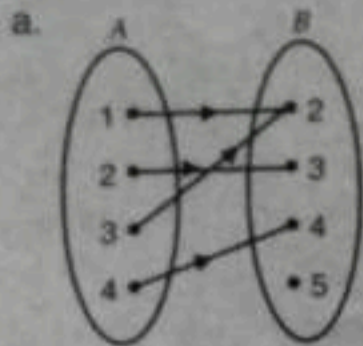
$$x = \frac{-5y - 3}{y - 2}$$

Jadi, $R_f = \{y \mid y \in R, y \neq 2\}$.

Tugas Mandiri

Kerjakanlah soal-soal berikut secara mandiri dengan teliti dan benar!

1. Tentukan daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari:



2. Tentukan daerah asal alami dari fungsi:

a. $f(x) = \frac{3x+6}{2x-4}$

c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

b. $f(x) = \sqrt{2x-6}$

d. $f(x) = \frac{\sqrt{2x-4}}{x^2+x-6}$

3. Tentukanlah daerah hasil dari setiap fungsi berikut!

a. $f(x) = 2x + 5$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R, -3 \leq x \leq 3\}$

b. $f(x) = x^2 - 2x - 8$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R, -3 \leq x \leq 3\}$

c. $f(x) = x^2 - 8x + 15$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R, -3 \leq x \leq 3\}$

4. Tentukan daerah hasil suatu fungsi $\frac{x+4}{x-2}$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R, x \neq 2\}$!

B. Jenis-Jenis Fungsi

Bentuk umum fungsi linear adalah $y = f(x)$, di mana x adalah variabel bebas dan y adalah variabel terikat. Artinya pada sistem koordinat Cartesius, sumbu X adalah sumbu yang memuat nilai-nilai yang membentuk himpunan daerah asal (domain), sedangkan sumbu Y adalah sumbu yang memuat nilai-nilai yang membentuk himpunan daerah kawan (kodomain). Himpunan nilai y yang merupakan peta dari x membentuk daerah hasil (range).

Jika daerah asal dibatasi oleh interval tertentu

Berikut ini akan diberikan beberapa macam fungsi dalam kaitannya dengan daerah asal dan daerah hasil.

1. Fungsi Linear

Bentuk umum fungsi linear adalah $f(x) = mx + c$ atau $y = mx + c$, di mana m adalah gradien garis fungsinya. Grafik fungsi ini berbentuk garis lurus, sehingga secara umum daerah asal suatu fungsi linear adalah $D = \{x \mid x \in R\}$.