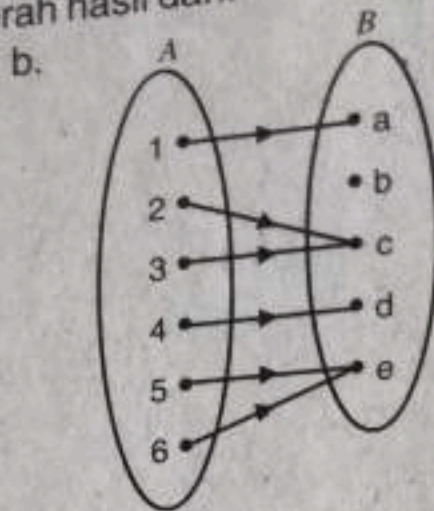
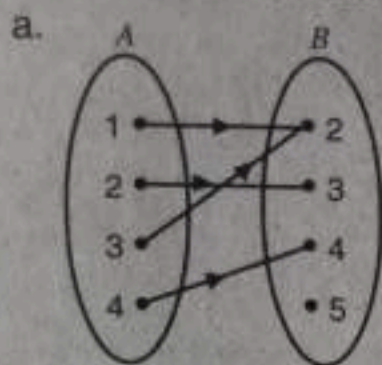


Kerjakanlah soal-soal berikut secara mandiri dengan teliti dan benar!

1. Tentukan daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari:



2. Tentukan daerah asal alami dari fungsi:

a. $f(x) = \frac{3x+6}{2x-4}$

c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

b. $f(x) = \sqrt{2x-6}$

d. $f(x) = \frac{\sqrt{2x-4}}{x^2+x-6}$

3. Tentukanlah daerah hasil dari setiap fungsi berikut!

a. $f(x) = 2x + 5$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R, -3 \leq x \leq 3\}$

b. $f(x) = x^2 - 2x - 8$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R, -3 \leq x \leq 3\}$

c. $f(x) = x^2 - 8x + 15$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R, -3 \leq x \leq 3\}$

4. Tentukan daerah hasil suatu fungsi $\frac{x+4}{x-2}$ untuk $D_f = \{x \mid x \in R, x \neq 2\}$!

B. Jenis-Jenis Fungsi

Bentuk umum fungsi linear adalah $y = f(x)$, di mana x adalah variabel bebas dan y adalah variabel terikat. Artinya pada sistem koordinat Cartesius, sumbu X adalah sumbu yang memuat nilai-nilai yang membentuk himpunan daerah asal (domain), sedangkan sumbu Y adalah sumbu yang memuat nilai-nilai yang membentuk himpunan daerah kawan (kodomain). Himpunan nilai y yang merupakan peta dari x membentuk daerah hasil (range).

Jika daerah asal dibatasi oleh interval tertentu pada sumbu X , akan berpengaruh pada daerah hasil.

Berikut ini akan diberikan beberapa macam fungsi dalam kaitannya dengan daerah asal dan daerah hasil.

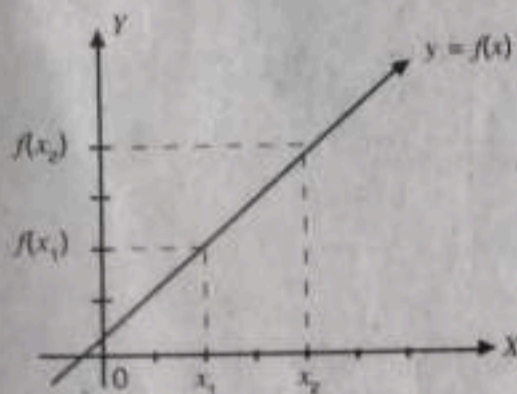
1. Fungsi Linear

Bentuk umum fungsi linear adalah $f(x) = mx + c$ atau $y = mx + c$, di mana m adalah gradien garis fungsinya. Grafik fungsi ini berbentuk garis lurus, sehingga secara umum daerah asal suatu fungsi linear adalah $D_f = \{x \mid x \in R\}$ dan daerah hasilnya $R_f = \{y \mid y \in R\}$.

Terdapat dua macam fungsi linear, yaitu fungsi linear monoton naik (ditandai dengan $m > 0$), dan fungsi linear monoton turun (ditandai dengan $m < 0$).

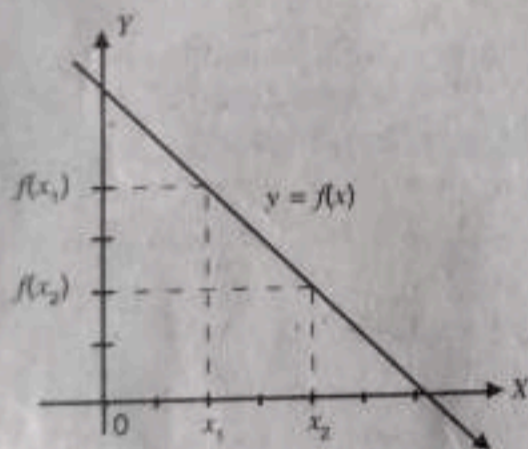
Syarat fungsi linear $f(x)$ monoton naik adalah jika x_1 dan x_2 adalah anggota himpunan daerah asal serta $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.

Misalkan daerah asal dibatasi $D_f = \{a \leq x \leq b\}$ maka daerah hasilnya adalah $R_f = \{f(a) \leq y \leq f(b)\}$.



Syarat fungsi linear $f(x)$ monoton turun adalah jika x_1 dan x_2 adalah anggota himpunan daerah asal serta $x_1 > x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

Dalam hal ini, misalkan daerah asal dibatasi $D_f = \{b \leq x \leq a\}$ maka daerah hasilnya adalah $R_f = \{f(b) \leq y \leq f(a)\}$.



Contoh:

1. Jika daerah asal fungsi $f(x) = 3x - 6$ dibatasi pada $D_f = \{x \mid -2 \leq x \leq 4, x \in R\}$, tentukanlah interval daerah hasilnya!

Penyelesaian:

$$x_1 = -2 \text{ maka } f(-2) = 3(-2) - 6 = -12$$

$$x_2 = 4 \text{ maka } f(4) = 3(4) - 6 = 6$$

$$\text{Jadi, } R_f = \{y \mid -12 \leq y \leq 6, y \in R\}.$$

2. Diketahui fungsi linear monoton naik $f(x) = 4x + 2$. Jika daerah asal fungsi tersebut dibatasi sehingga diperoleh daerah hasil $R_f = \{y \mid 14 \leq y \leq 26, y \in R\}$, tentukanlah daerah asalnya!

Penyelesaian:

$$y_1 = 14 \text{ maka } 14 = 4x + 2. \text{ Diperoleh } x = 3$$

$$y_2 = 26 \text{ maka } 26 = 4x + 2. \text{ Diperoleh } x = 6$$

$$\text{Jadi, } D_f = \{x \mid 3 \leq x \leq 6, x \in R\}.$$

3. Sebuah fungsi linear monoton naik dibatasi daerah asalnya dengan interval $D_f = \{x \mid 1 \leq x \leq 5, x \in \text{real}\}$ sehingga diperoleh daerah hasil $R_f = \{y \mid 8 \leq y \leq 20, y \in R\}$. Tentukanlah persamaan fungsi linearnya!

Penyelesaian:

$$\text{Misalkan } y = mx + c$$

$$\text{Maka } (1, 8) \text{ sehingga}$$

$$(5, 20) \text{ sehingga}$$

$$\begin{array}{r} 8 = m + c \\ 20 = 5m + c \\ \hline -12 = -4m \\ m = 3 \end{array}$$

$$20 = 5(3) + c$$

$$c = 5 \text{ Jadi, } y = 3x + 5.$$

4. Diketahui fungsi linear yang melalui titik $(5, -2)$ dengan gradien -3 . Jika daerah asal fungsi tersebut dibatasi dengan interval $-6 \leq x \leq 4$, tentukan daerah hasilnya!

Penyelesaian:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = -3(x - 5)$$

$$y = -3x + 13$$

$$\text{Untuk } x = -6 \text{ maka } y = -3(-6) + 13 = 31$$

$$\text{Untuk } x = 4 \text{ maka } y = -3(4) + 13 = 1$$

$$\text{Jadi, } R_f = \{y \mid 1 \leq y \leq 31, y \in R\}.$$

2. Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$. Pada fungsi kuadrat terdapat dua macam titik balik, yakni titik balik maksimum dan titik balik minimum.

Terdapat dua macam fungsi kuadrat, yaitu:

- Fungsi kuadrat dengan grafik membuka ke atas (syaratnya $a > 0$). Pada fungsi kuadrat ini memiliki titik balik minimum.
- Fungsi kuadrat dengan grafik membuka ke bawah (syaratnya $a < 0$). Pada fungsi kuadrat ini memiliki titik balik maksimum.

Grafik fungsi $y = ax^2 + bx + c$ mempunyai

titik balik dengan koordinat $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$, dengan

$$D = b^2 - 4ac.$$

- Jika $a > 0$ maka diperoleh titik balik minimum.
- Jika $a < 0$ maka diperoleh titik balik maksimum.
- Sumbu simetrinya $x = -\frac{b}{2a}$

Secara umum, daerah asal dari fungsi kuadrat adalah $D_f = \{x \mid x \in R\}$. Namun daerah hasilnya bergantung pada bentuk grafiknya.

Contoh:

1. Tentukan daerah hasil dari setiap fungsi kuadrat

$$f(x) = x^2 - 2x - 8$$

Penyelesaian:

$f(x) = x^2 - 2x - 8$ mempunyai titik minimum, yaitu:

$$\left(-\frac{-2}{2(1)}, -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}{4 \cdot 1} \right) = (1, -9)$$

Jadi daerah hasilnya adalah $R_f = \{y \mid y \geq -9, y \in R\}$.

2. Jika daerah hasil fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 - 4x - 2a$ adalah $R_f = \{y \mid y \leq 6\}$, tentukan nilai a !

Penyelesaian:

$f(x) = ax^2 - 4x - 2a$ mempunyai titik maksimum, maka $a < 0$ sehingga:

$$y_{\max} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4a(-2a)}{4a} = 6$$

$$-\frac{16 + 8a^2}{4a} = 6$$

$$16 + 8a^2 = -24a$$

$$8a^2 + 24a + 16 = 0$$

$$a^2 + 3a + 2 = 0$$

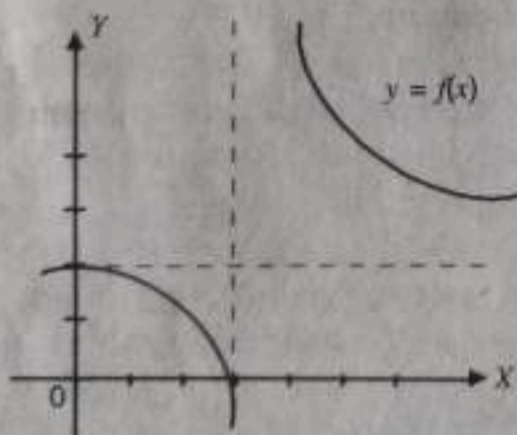
$$(a + 2)(a + 1) = 0$$

Jadi, $a = -2$ atau $a = -1$.

3. Fungsi Pecahan Linear

Bentuk umum fungsi pecahan linear adalah

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{px + q} \text{ dengan } x \neq -\frac{p}{q}$$



Salah satu contoh grafik fungsi ini tertera pada gambar di atas. Secara umum daerah asal untuk fungsi

ini adalah $D_f = \{x \mid x \neq -\frac{p}{q} \text{ dan } x \in R\}$.

Contoh:

1. Tentukan daerah asal dan daerah hasil alamiah

setiap fungsi pecahan linear $y = f(x) = \frac{3x + 2}{x - 4}$!

Penyelesaian:

$$y = \frac{3x + 2}{x - 4}$$

$$\begin{aligned} y(x - 4) &= 3x + 2 \\ xy - 4y &= 3x + 2 \\ xy - 3x &= 4y + 2 \\ (y - 3)x &= 4y + 2 \\ x &= \frac{4y + 2}{y - 3} \end{aligned}$$

2. Jadi, $R_f = \{y \mid y \neq 3, y \in R\}$ dan $D_f = \{x \mid x \neq 4, x \in R\}$.
Jika daerah hasil alamiah fungsi $y = f(x) =$

$\frac{ax + 5}{2x - 3}$ adalah $R_f = \{y \mid y \neq 4, y \in R\}$, tentukanlah nilai a !

Penyelesaian:

$$y = f(x) = \frac{ax + 5}{2x - 3}$$

$$2xy - 3y = ax + 5$$

$$2xy - ax = 3y + 5$$

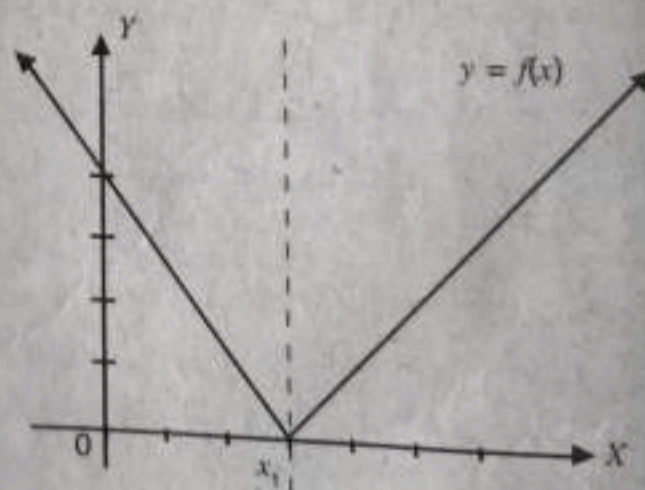
$$x(2y - a) = 3y + 5$$

$$x = \frac{3y + 5}{2y - a}$$

Sehingga $y \neq \frac{a}{2} = 4 \Rightarrow a = 8$.

4. Fungsi Nilai Mutlak

Bentuk umum fungsi pecahan linear adalah $f(x) = |ax + b|$. Salah satu contoh grafik fungsi ini tertera pada gambar di bawah.



Ciri khas grafik fungsi ini adalah selalu membuka ke atas. Misalkan titik minimum $P(x_1, 0)$, sehingga untuk daerah asal $D_f = \{x \mid x \in R\}$ maka daerah hasilnya adalah $R_f = \{y \mid y = f(x_1) \geq 0, y \in R\}$. Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi modulus (mutlak) apabila fungsi ini memetakan setiap bilangan real pada domain fungsi ke unsur harga mutlakannya.

$$f(x) = |x| \text{ atau } f(x) = |ax + b|$$

$$f(x) = |x| \begin{cases} x, & \text{jika } x \geq 0 \\ -x, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Contoh:

Jika daerah asal fungsi $f(x) = |2x - 6|$ dibatasi oleh interval $\{-2 \leq x \leq 5\}$, tentukanlah daerah hasilnya!

Penyelesaian:

$$2x - 6 = 0 \text{ maka } x = 3$$

$$\text{Untuk } x = -2 \text{ maka } f(-2) = |2(-2) - 6| = |-10| = 10$$

$$\text{Untuk } x = 5 \text{ maka } f(5) = |2(5) - 6| = 4$$

Karena $x = 3$ berada di dalam interval $-2 \leq x \leq 5$, maka daerah hasilnya adalah $R_f = \{y \mid 0 \leq y \leq 10, y \in R\}$.

Ditinjau dari kesimetrisannya fungsi dapat dibagi menjadi:

a. Fungsi genap

Suatu fungsi f dikatakan genap jika berlaku $f(x) = f(-x)$ untuk semua f anggota D_f atau fungsi tersebut simetris terhadap sumbu Y .

b. Fungsi ganjil

Suatu fungsi f dikatakan ganjil jika berlaku $f(-x) = -f(x)$ untuk semua f anggota D_f atau fungsi tersebut memenuhi sifat simetri putar terhadap titik asal $O(0, 0)$.

Contoh:

Tentukanlah di antara fungsi-fungsi berikut yang merupakan fungsi genap dan ganjil!

a. $f(x) = 2x^4 - 3x^2$

b. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

c. $f(x) = 3x^3 - 5x$

Penyelesaian:

a. $f(x) = 2x^4 - 3x^2$

$$\text{Uji } f(-x) = 2(-x)^4 - 3(-x)^2$$

$$f(-x) = 2x^4 - 3x^2$$

Karena $f(x) = f(-x)$ untuk semua f anggota D_f , maka fungsi tersebut merupakan fungsi genap.

b. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

$$\text{Uji } f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 2$$

$$f(-x) = x^2 + 4x + 2$$

$$\text{Uji } -f(x) = -(x^2 - 4x + 2)$$

$$-f(x) = -x^2 + 4x - 2$$

Karena $f(-x) \neq f(x)$ dan $f(-x) \neq -f(x)$ untuk semua f anggota D_f , maka fungsi tersebut bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil.

c. $f(x) = 3x^3 - 5x$

$$\text{Uji } f(-x) = 3(-x)^3 - 5(-x)$$

$$f(-x) = -3x^3 + 5x$$

$$\text{Uji } -f(x) = -(3x^3 - 5x)$$

$$-f(x) = -3x^3 + 5x$$

Karena $f(-x) = -f(x)$ untuk semua f anggota D_f , maka fungsi tersebut merupakan fungsi ganjil.

Tugas Mandiri

Kerjakanlah soal-soal berikut secara mandiri dengan teliti dan benar!

1. Jika daerah asal fungsi $f(x) = 5 - 2x$ dibatasi pada $D_f = \{x \mid -3 \leq x \leq 6, x \in R\}$, tentukanlah interval daerah hasilnya!

2. Sebuah fungsi linear monoton turun dibatasi daerah asalnya dengan interval $D_f = \{x \mid -5 \leq x \leq 4, x \in R\}$ sehingga diperoleh daerah hasil $R_f = \{y \mid -2 \leq y \leq 16, y \in R\}$. Tentukanlah persamaan fungsi linearnya!

3. Diketahui fungsi linear yang melalui titik $A(3, 2)$ dan $B(4, 5)$. Jika daerah asal fungsi tersebut dibatasi $x \geq 0$, tentukanlah daerah hasilnya!

4. Tentukanlah daerah hasil dari setiap fungsi kuadrat $f(x) = -x^2 + 6x - 5$!

5. Jika daerah asal fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x - 3$ adalah $D_f = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$, tentukanlah daerah hasilnya!

6. Jika daerah asal fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ adalah $D_f = \{x \mid 3 \leq x \leq 6\}$, tentukanlah daerah hasilnya!

7. Tentukan daerah asal dan daerah hasil alamiah setiap fungsi pecahan linear $y = f(x) = \frac{5 - 2x}{3x + 6}$!

8. Jika daerah hasil alamiah fungsi $y = f(x) = \frac{ax - 3}{2x - 5}$ adalah $R_f = \{y \mid y \neq 3, y \in R\}$, tentukanlah nilai a !

9. Jika daerah asal fungsi $f(x) = |8 - 2x|$ dibatasi oleh interval $\{-3 \leq x \leq 2\}$, tentukanlah daerah hasilnya!